

SOBRE EL MODELADO COMPUTACIONAL DE LOS PROCESOS DE FRACTURA HIDRÁULICA

José Hasbani¹, Martín Sánchez², Adrian Rosolen³, Gustavo Villafines², Rita Toscano¹,
Raúl Radovitzky³ y Eduardo Dvorkin¹

¹ SIM&TEC S.A., Buenos Aires, Argentina

² Y-TEC S.A., Ensenada, Argentina

³ Massachusetts Institute of Technology, U.S.A.

José Hasbani <jhasbani@simytec.com>

Martín Sánchez <martin.sanchez@ypf.com>

Adrian Rosolen <rosolen@MIT.EDU>

Gustavo Villafines <gustavo.villafines@ypf.com>

Rita Toscano <rtoscano@simytec.com>

Raul Radovitzky <rapa@MIT.EDU>

Eduardo Dvorkin <edvorkin@simytec.com>

Palabras clave: fractura hidráulica, modelado computacional

ABSTRACT: *On the computational modeling of hydraulic fracturing processes*

A finite element formulation based on the Discontinuous Galerkin technique, which with the addition of cohesive interphase elements enables the efficient modeling of hydraulic fracturing processes, is discussed. The formulation is three dimensional, it has been implemented in a parallel code and it presents an excellent scalability when the number of processors is increased.

To illustrate on the potential of the selected modeling methodology, first the simulation of the Brazilian Test (diametric compression of a cylindrical sample) is presented. The predicted ultimate loads show an excellent agreement with the theoretical results. Afterwards the results of a simplified model of hydraulic fracturing are shown; this model predicts, for each point of the domain, the velocities and accelerations induced by the elastic waves generated during the fracturing process. These results will be validated via microseismic monitoring.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el fuerte impulso que están recibiendo internacionalmente los procesos de fractura hidráulica (Valkó & Economides 1995) en yacimientos de petróleo no convencionales hace que tanto empresas operadoras, empresas de servicios petroleros, empresas de desarrollo de software e instituciones académicas estén invirtiendo importantes recursos en el desarrollo de herramientas de simulación computacional de estos procesos.

Existen gran cantidad de metodologías numéricas que permiten modelar los procesos de fractura, cada uno con sus ventajas y limitaciones. Así por ejemplo, en el método de la fractura difusa, el efecto estructural de la fisura es simulado utilizando un material elasto-plástico equivalente y la propagación de las misma no se describe en detalle, sino que se alteran la rigidez y la resistencia al flujo de la formación a medida que el proceso progresa (Will 2010; Li *et al.* 2012; Zhou & Hou 2013). Por otro lado, las metodologías XFEM, permiten modelar correctamente la propagación desde el punto de vista de la mecánica de la fractura, pero cuenta con baja eficiencia para implementaciones de procesamiento paralelo (lo cual imposibilita el modelado de grandes dominios 3D) (Dahi-Taleghani & Olson 2011; Chen 2013; Gordeliy & Peirce 2013; Weber *et al.* 2013).

Las aproximaciones de los problemas de fractura en elementos finitos continuos son complicadas debido a la necesidad de actualizar en forma dinámica la topología de las mallas, complicando así la paralelización (Ingraffea & Heuze 1980).

Los puntos que se consideran más relevantes para el desarrollo de un simulador de fractura hidráulica son:

1. **Capacidad de modelar en grandes dominios 3D:** se requiere de una metodología computacional eficiente para el modelado del desarrollo de procesos de múltiple fisuración, a partir de la cual será simulado el proceso de fractura hidráulica incluyendo una distribución inicial de fracturas naturales. Es importante basar la simulación en principios fractomecánicos y poder simular grandes dominios tridimensionales.
2. **Relaciones constitutivas:** se requiere incluir en el modelo las propiedades mecánicas de las formaciones determinadas a partir de modelos geológicos y geomecánicos (incorporación de leyes constitutivas no-lineales).
3. **Procesamiento paralelo:** dado el tamaño de los modelos, es primordial la capacidad de resolverlos utilizando procesamiento paralelo. Además se deberán incluir fisuras que se extiendan desde el dominio de un procesador al de otro.
4. **Mecánica de fractura:** es necesario utilizar modelos fractomecánicos válidos desde el punto de vista de la teoría de la mecánica del continuo para asegurar la rigurosidad de las soluciones a ser obtenidas.
5. **Microsísmica:** para poder comparar los resultados, es necesaria la incorporación del modelado de la marcha de ondas sísmicas durante el proceso de fractura (microsísmica sintética).
6. **Modelado de fluidos:** se debe contar con la capacidad de acoplar realísticamente el modelo de fractura de sólidos con modelos de circulación de fluidos (fluido utilizado para fracturar y flujos multifásicos durante la producción de petróleo y gas).

Se ha utilizado en este trabajo una formulación de elementos finitos basada en la técnica *Discontinuous Galerkin* (DG) que proporciona una metodología de simulación que incorpora los puntos arriba mencionados. (Noels & Radovitzky 2006; Noels & Radovitzky 2007; Noels & Radovitzky 2008; Radovitzky *et al.* 2011).

La alternativa seguida es la combinación de la teoría cohesiva de fractura (Camacho & Ortiz 1996; Ortiz & Pandolfi 1999) y la formulación de DG del problema continuo dinámico. El punto principal de interés en DG es que permite un salto de desplazamiento discontinuo entre elementos. Además, en el continuo sin fisuras, la compatibilidad entre elementos se garantiza a través de las integrales de contorno entre elementos, de tal forma de garantizar la consistencia y la estabilidad de la solución de elementos finitos.

En (Radovitzky *et al.* 2011) se presenta la implementación de un problema de fractura dinámica en 3D con 1.0×10^9 de grados de libertad, en un cluster de 4096 procesadores, donde queda probada la escalabilidad y la posibilidad de afrontar problemas aún más grandes.

En el presente trabajo se discute sucintamente sobre la aplicabilidad de la metodología DG al modelado de procesos de fractura. A continuación, se muestran resultados de la simulación de un ensayo brasileño (compresión diametral en probetas cilíndricas) donde se obtiene una excelente correspondencia con los resultados teóricos. Finalmente, se presenta una simulación simplificada de fracturamiento hidráulico donde se obtienen valores de velocidad y aceleración en distintos puntos del dominio de cálculo. En la última sección se presentan las conclusiones.

MODELADO DE FRACTURA EN SÓLIDOS

Las fracturas en roca resultantes del proceso de estimulación hidráulica tienen la característica fundamental de ser discretas, es decir, constituyen superficies de discontinuidad dentro del material. Para modelar la esencia discontinua del problema en cuestión, se ha adoptado la metodología DG. Esta clase de métodos constituye una generalización de la formulación débil del problema de mecánica del sólido en la que se permite desde el comienzo la presencia de discontinuidades en la solución del problema, tal como ocurre en los procesos de fractura.

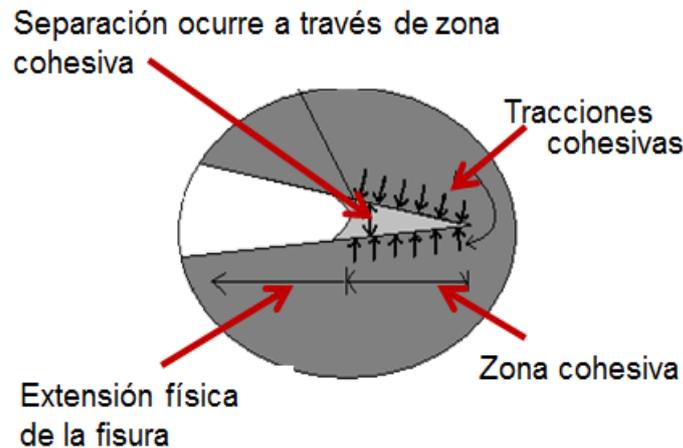


Figura 1. Propagación de una fisura.

La formulación débil generalizada da lugar a integrales de contorno en los bordes de elemento cuya función es imponer la compatibilidad, consistencia y estabilidad de la solución previo a la nucleación de una fisura (Noels & Radovitzky 2006). Cuando la fisura aparece, esto es, cuando se cumple el criterio pertinente de falla de la roca en cuestión, estas integrales de contorno dejan de operar, dando lugar a la creación de nuevas superficies y a la liberación de energía de fractura. En la metodología adoptada, este proceso gradual de formación de nuevas superficies en un material es descrito dentro del marco de las teorías cohesivas de fractura (Dugdale 1960; Barenblatt 1962; Radovitzky *et al.* 2011), tal como se muestra en la Figura 1. La separación es resistida por las tracciones cohesivas que se modelan con una ley macroscópica del tipo $T=T(\delta)$, donde δ es la separación entre las caras de la fisura.

La ley cohesiva que se adoptó en este trabajo es graficada en la *Figura 2*.

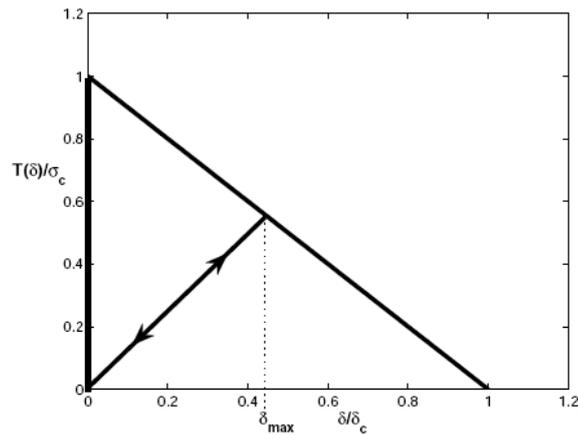


Figura 2. Ley cohesiva utilizada en los modelos. En la descarga y recarga elástica δ_{\max} representa el mayor valor de apertura alcanzado hasta el instante.

En la Figura 2, la apertura efectiva es, $\bar{\delta} = [(\beta \bar{\delta}_t)^2 + (\bar{\delta}_n)]^{1/2}$; siendo $\bar{\delta}_t$ el deslizamiento de los lados de la fisura (Modo II) y $\bar{\delta}_n$ la apertura normal de la fisura (Modo I). El valor de apertura crítica ($\bar{\delta}_c$) y el valor de tensión de rotura (σ_c) son propiedades del material. Estas están acopladas debido a que el área del triángulo de la Figura 2 multiplicada por $(\sigma_c \cdot \bar{\delta}_c)$ es la energía de fractura específica del material (G_f) (Broek 1984).

La constante β está definida por $\beta = K_{IIc}/K_{Ic}$, donde K_{Ic} y K_{IIc} son la tenacidad fractomecánica del material en Modo I y II respectivamente (Broek 1984). El valor de β depende en consecuencia del material que se esté modelando.

En los modelos de *DG* el material interior de los elementos finitos es modelado utilizando relaciones constitutivas fenomenológicas estándar (elasticidad, elasto-plasticidad, viscoelasticidad, viscoplasticidad, etc.) en tanto que en las superficies inter-elementales se colocan los llamados “*elementos de interface*” que son modelados utilizando la relación constitutiva descrita más arriba.

Es fundamental establecer que de una correcta caracterización del proceso de iniciación de fractura depende el éxito de las simulaciones que se desarrollen, existen diversas teorías para determinarla (Colmenares & Zoback 2002): criterio de la máxima tensión principal, criterio de Mohr-Coulomb, criterio de Lade modificado, criterio de Drucker-Prager. Si bien en los casos que se discuten en el presente trabajo hemos utilizado exitosamente la teoría de la máxima tensión principal, es importante destacar que el uso de una u otra teoría de falla, estará determinado por los datos experimentales con que se cuente.

Además de la capacidad de describir el carácter discreto de la fractura, el método propuesto tiene la ventaja distintiva de evitar la necesidad de efectuar cambios topológicos en la malla computacional a medida que una fisura se propaga, lo cual permite un tratamiento natural de la propagación de fisuras a través de borde de procesador y, como tal, la escalabilidad en cálculos en paralelo. Otra ventaja significativa del método es que preserva la consistencia y estabilidad en zonas no fracturadas de la malla, lo cual evita problemas en la propagación de ondas de tensión típicas de los llamados métodos cohesivos intrínsecos (Radovitzky *et al.* 2011).

MODELADO DEL ENSAYO BRASILEÑO

En esta sección se presenta el modelado del ensayo brasileño (ensayo de compresión diametral de una probeta cilíndrica controlado por desplazamientos) que es normalmente usado en rocas, hormigones, etc. para determinar la resistencia a la rotura de dichos materiales.

En la *Tabla 1* se presentan las propiedades materiales utilizadas para las simulaciones. En todos los casos, la probeta tiene un diámetro $D = 0.10$ m y un espesor $T = 0.0254$ m.

Propiedad	Valor
Módulo de Young (E)	21500.0 MPa
Coeficiente de Poisson (ν)	0.19
Energía de fractura ($G_f = K_{IC}^2/E$)	10 N/m (Broek 1984)
Tensión de rotura (σ_{fr})	4.4 MPa

Tabla 1. Propiedades materiales utilizadas para la simulación del ensayo brasileño.

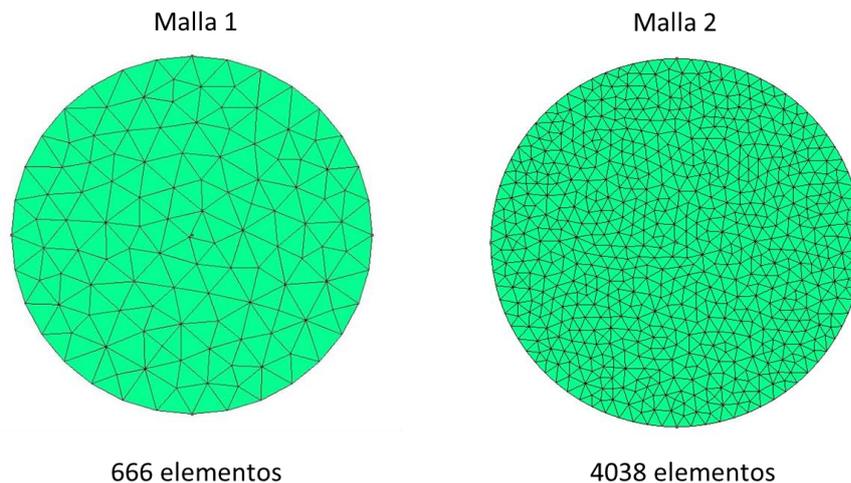


Figura 3. Mallas utilizadas en el modelado del ensayo brasileño.

Para estudiar el efecto del mallado sobre los resultados se han considerado las dos mallas 3D que se presentan en la Figura 3.

Dado que las velocidades de aplicación de carga en los ensayos experimentales es del orden de 1mm/min, para acelerar las simulaciones se usarán velocidades mayores: 100 mm/min y 1000 mm/min, observando que las mismas no tengan influencia sobre el resultado de la simulación.

Como parámetro de comparación se ha utilizado el valor teórico de la carga de rotura provisto en (Procopio *et al.* 2003),

$$P_R^T = \frac{\sigma_{fr} \pi D T}{2} = 17.279 \text{ N}$$

En ambos casos de simulación se han implementado condiciones de contacto tipo Hertz para la aplicación de la carga. En la Figura 4 se pueden ver las curvas carga desplazamiento para los modelos simulados. Tal como se aprecia en la figura, la velocidad de aplicación de carga no tiene influencia en el resultado de ensayo modelado. Vale la pena comentar, que la diferencia de pendiente en la respuesta, para las distintas mallas, se debe a la diferencia en la discretización del contacto con distintos tamaños de elementos (problema de Hertz).

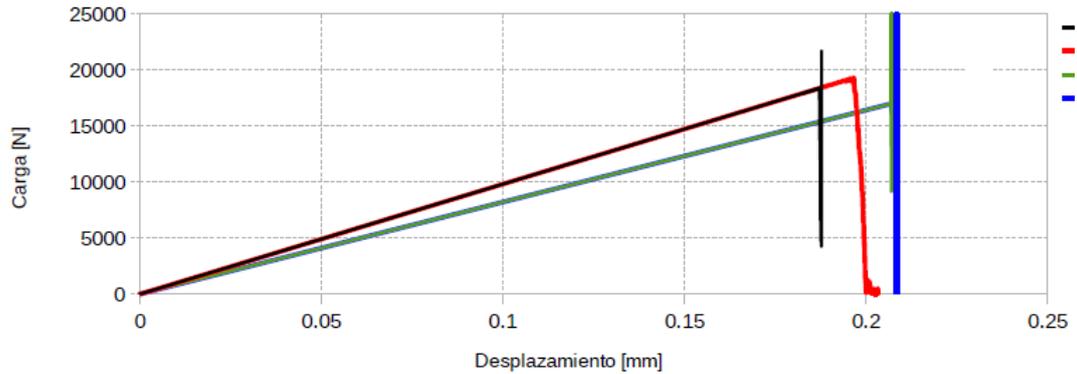


Figura 4. Curva carga-desplazamiento para el ensayo brasileño para ambas mallas (Fig. 3) y para ambas velocidades. Para velocidad de aplicación de carga 100 mm/min, la curva negra representa la respuesta para la malla gruesa y la curva verde para la malla fina. Para velocidades de 1000 mm/min, la curva roja representa la respuesta para malla gruesa y la azul para la malla fina.

En la Tabla 2 resumimos los resultados del modelado. Se puede apreciar que la relación de cargas teóricas y modeladas para ambas mallas y ambas velocidades de aplicación de carga no supera el 11%. Si bien la malla fina proporciona un resultado más ajustado a la teoría, ambos resultados son tecnológicamente aceptables.

Malla	Velocidad	P_R^{DG} / P_R^T
1	100 mm/min	1.06
2	100 mm/min	0.98
1	1000 mm/min	1.11
2	1000 mm/min	0.98

Tabla 2. Resultados obtenidos con el modelado del ensayo brasileño.

Puede observarse también que en este ensayo, en el que el fenómeno de iniciación de fractura es más importante que el de propagación (tener en cuenta que en la zona central de la probeta el estado de tensiones previo a la fisuración es aproximadamente uniforme), el efecto de la velocidad de carga es bajo. En problemas en el que el fenómeno de propagación es el más importante, la metodología de elementos cohesivos (DG) reproduce el efecto dinámico que se observa experimentalmente (Camacho & Ortiz 1996).

MODELADO DE PROCESOS DE FRACTURA HIDRÁULICA

Para modelar el proceso de fractura hidráulica se ha incorporado en los elementos de interface un modelo material como el que se muestra en la *Figura 5*.

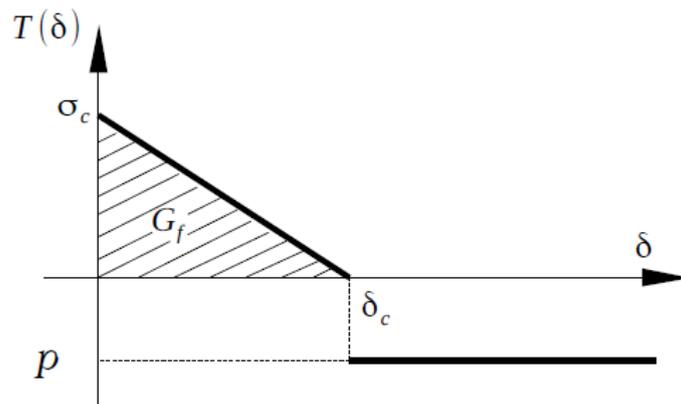


Figura 5. Material de interface para simular la fractura hidráulica.

La metodología para aplicar la presión hidráulica se indica en la *Figura 5*: al completarse la apertura de la fisura se aplica sobre las caras de la misma una presión hidráulica “ p ”. En esta primera aproximación al modelo se han despreciado pérdidas de carga del fluido en las tuberías, en la formación, entre otras cuestiones relacionadas a la mecánica de fluidos.

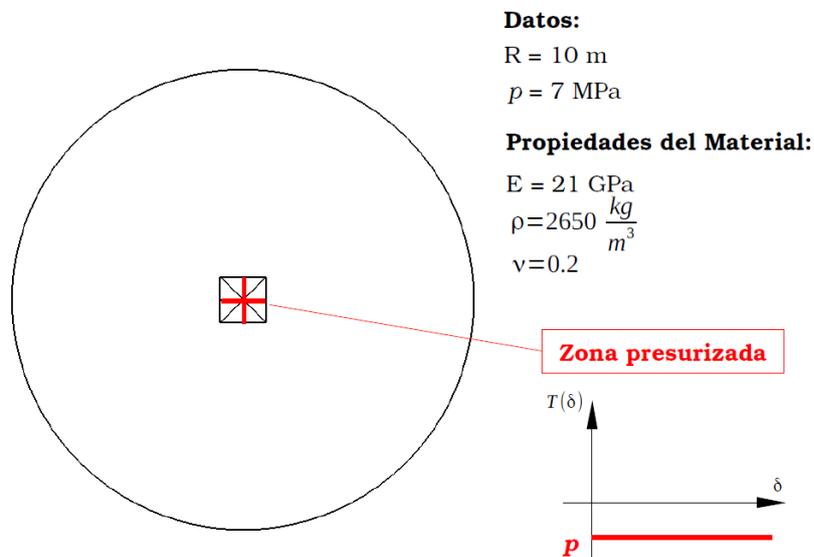


Figura 6. Cuatro canales presurizados (R es el radio de la probeta y p la presión hidráulica impuesta para fracturar).

En la *Figura 6* se presenta un problema demostrativo a ser modelizado, en el que los cuatro canales indicados en rojo son presurizados desde el comienzo. En la *Figura 7* y en la *Figura 8* se presenta la propagación de fisuras que predice el modelo utilizando dos mallas diferentes.

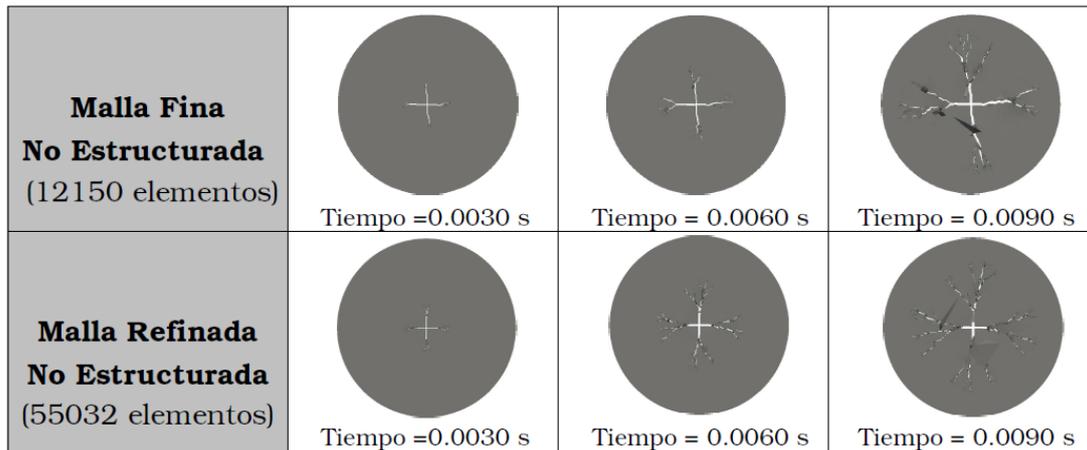


Figura 7. Esquema de fisuración obtenido para el caso de cuatro canales presurizados.

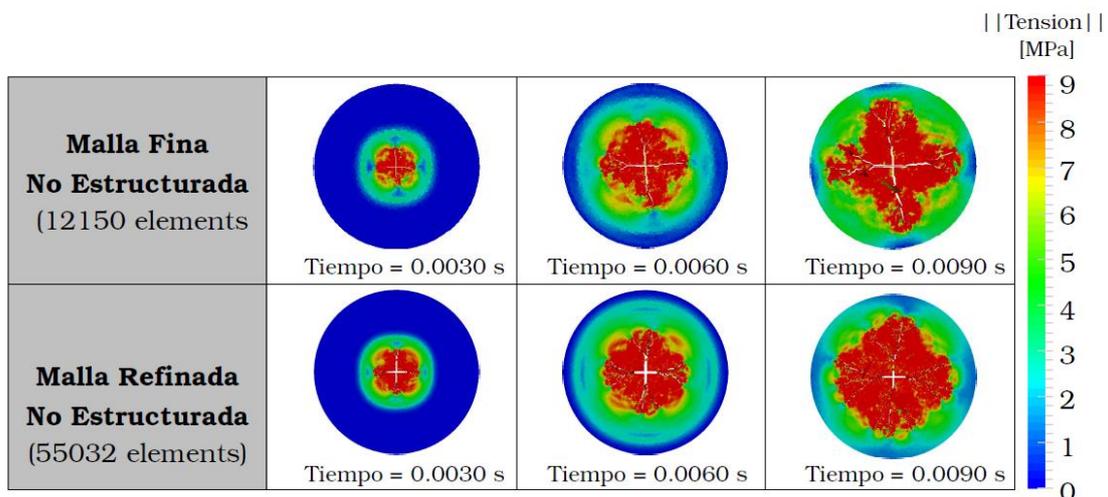


Figura 8. Esquema de fisuración y módulo del tensor de tensiones (bandplot) para el caso de los cuatro canales presurizados.

Es importante observar que la solución de elementos finitos converge al refinarse la malla. Es también importante notar las bifurcaciones de fisuras que los modelos de elementos finitos predicen cuando la energía aportada por el trabajo de las cargas exteriores supera al doble de la energía de fractura (Broek 1984).

En la Figura 9 se presenta el segundo problema considerado en el que ocho canales son presurizados. El esquema de fisuración que se predice con los modelos de elementos finitos para este caso se presenta en la Figura 10 y Figura 11.

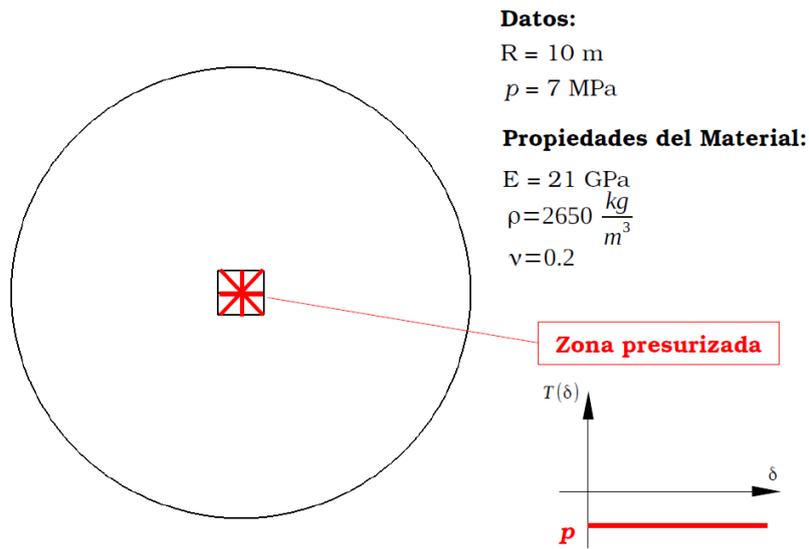


Figura 9. Ocho canales presurizados (R es el radio de la probeta y p la presión hidráulica impuesta para fracturar).

<p>Malla Fina No Estructurada (12150 elementos)</p>	 Tiempo = 0.0025 s	 Tiempo = 0.0037 s	 Tiempo = 0.0056 s
<p>Malla Refinada No Estructurada (55032 elementos)</p>	 Tiempo = 0.0025 s	 Tiempo = 0.0037 s	 Tiempo = 0.0056 s

Figura 10. Esquema de fisuración obtenido para el caso de ocho canales presurizados.

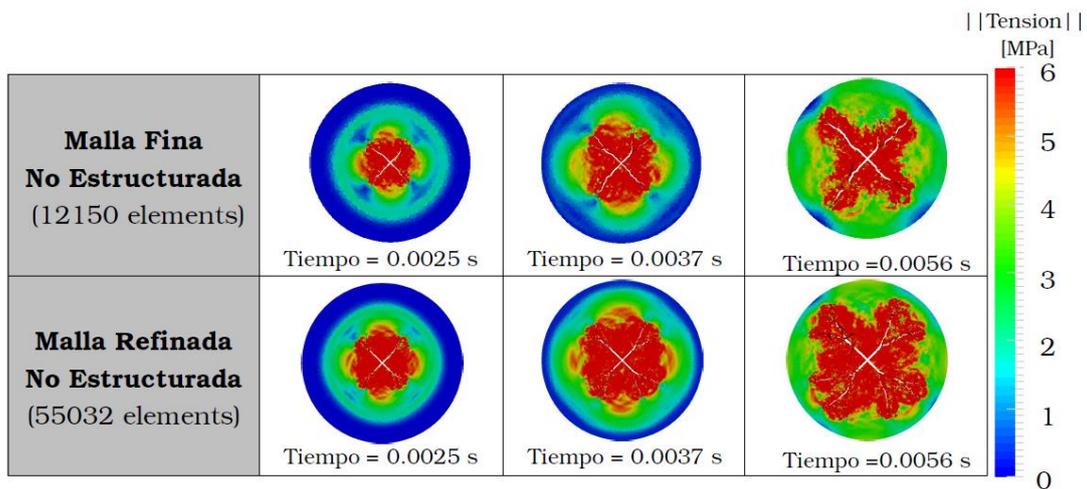


Figura 11. Esquema de fisuración y módulo del tensor de tensiones (bandplot) para el caso de los ocho canales presurizados.

Predicción de señales de microsísmica

La medición de eventos microsísmicos en las operaciones de fractura hidráulica es una técnica utilizada en la industria para estimar el volumen de roca fracturada durante la operación. Existen dos opciones disponibles para tal fin, la microsísmica de superficie y la de pozo dependiendo del diseño de la adquisición (Maxwell *et al.* 2010; Duncan & Eisner 2013).

En ambos casos se utilizan geófonos para adquirir la cinemática de la formación. De acuerdo al tipo de geófonos que se utilicen durante el proceso, se podrán medir en el campo velocidades o aceleraciones.

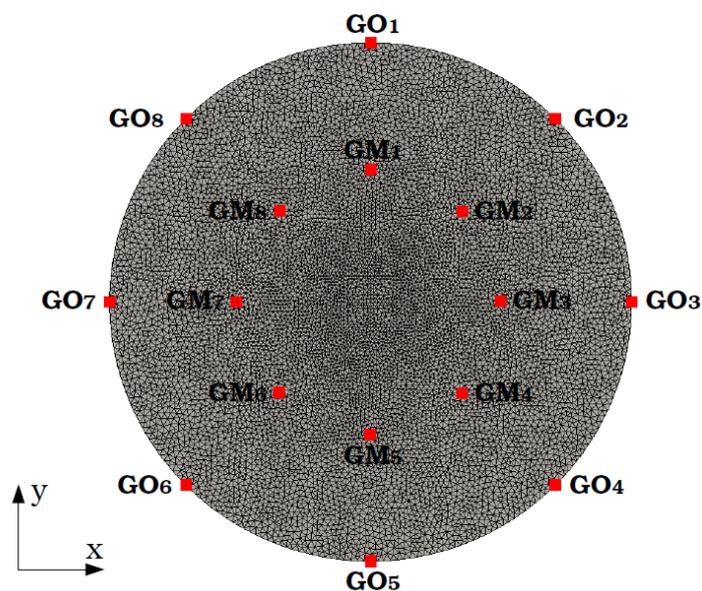


Figura 12. Puntos de obtención de resultados del avance de ondas elásticas generadas por el proceso de fracturamiento.

En la Figura 12 se presentan, para el modelo de ocho canales presurizados, los puntos del dominio donde se obtienen en función del tiempo las velocidades y aceleraciones del material excitado por las ondas elásticas generadas. Se ha utilizado el modelo con malla de 55,032 elementos (en un caso real estos puntos deben coincidir con la ubicación de los geófonos)

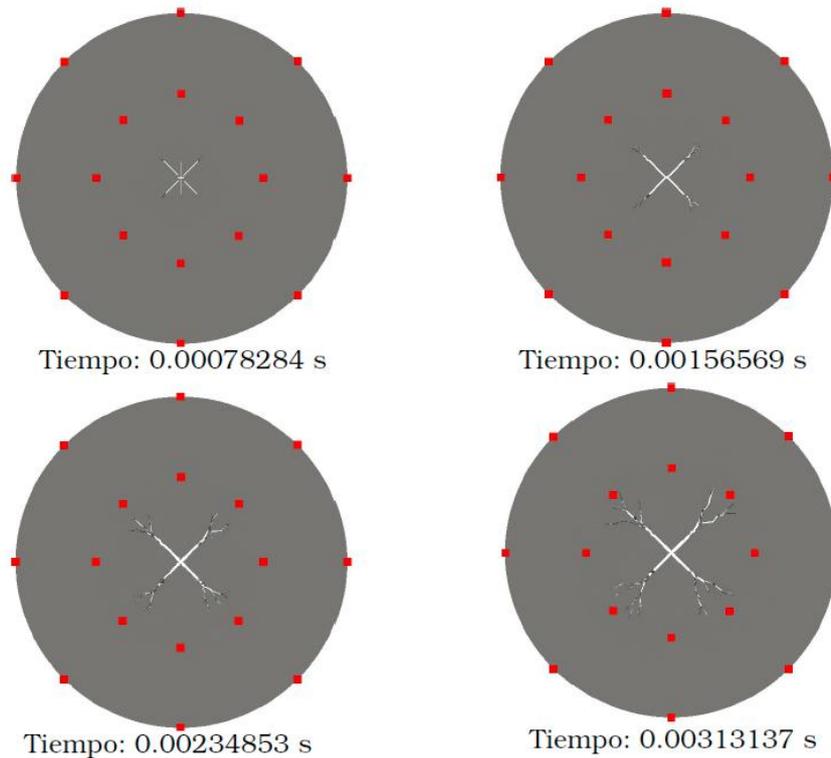


Figura 13. Posición relativa de geófonos y fracturas.

En la Figura 13 se presenta la distribución de puntos, en relación con el esquema de fisuras, en donde se obtienen los valores de velocidad y aceleración de las ondas elásticas para diferentes tiempos; dado que en el modelo desarrollado no se han colocado condiciones de borde absorbentes, los resultados serán válidos para el tiempo $t \leq 0.0035$ s, *tiempo para el cual la onda elástica alcanza el borde del dominio modelado*.

En las Figuras 14, 15 y 16 se comparan, para algunos de los puntos indicados en la *Figura 12*, las velocidades y aceleraciones obtenidas en los siguientes casos,

- **Sin fractura:** la tensión de fractura del material de las interfaces es aumentado para que el material no fracture y así producir una señal de referencia (caso base) contra la que comparar las señales.
- **Presurización:** el material de las interfaces incluye las leyes cohesivas.

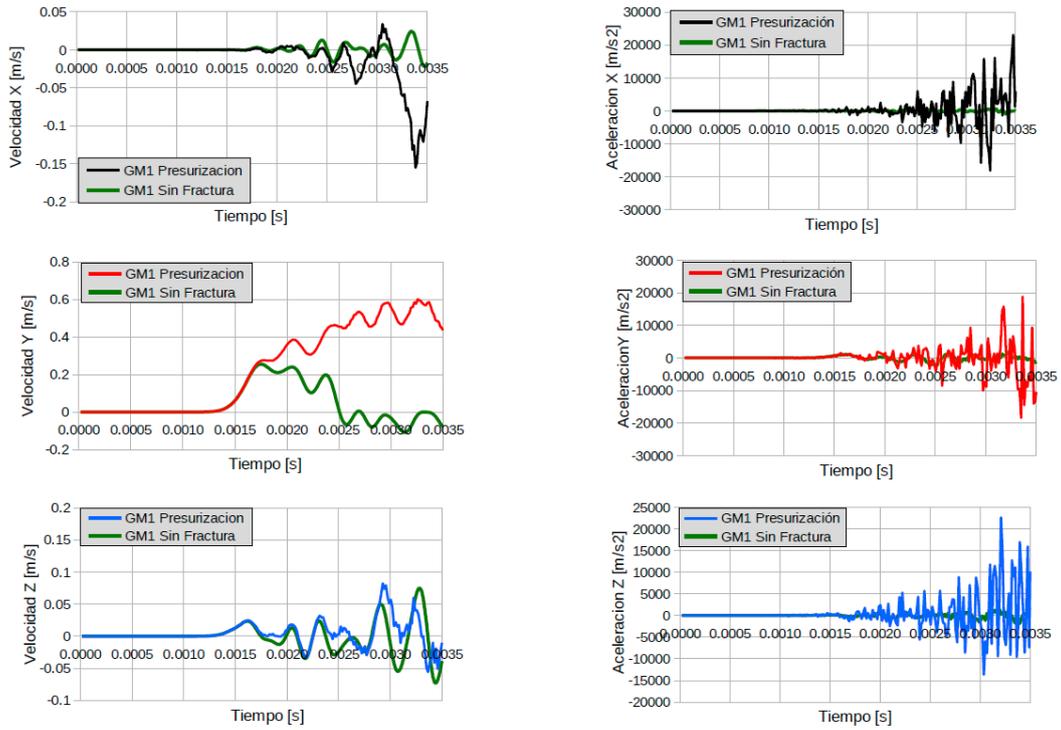


Figura 14. Velocidades y aceleraciones en GM1.

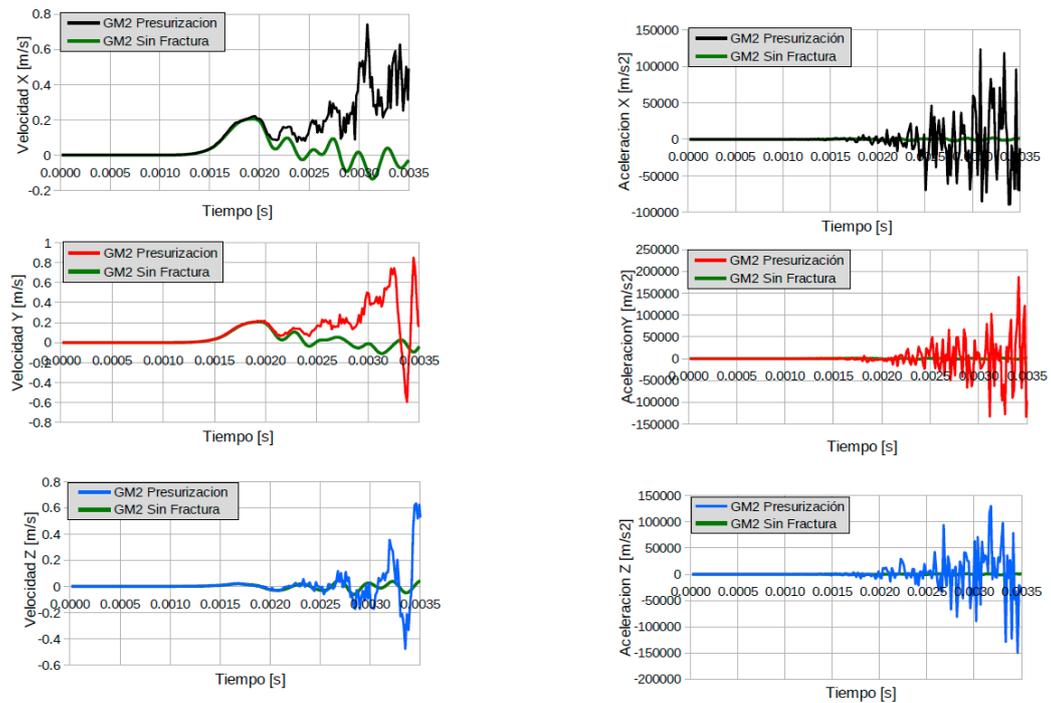


Figura 15. Velocidades y aceleraciones en GM2.

Claramente se observa en los 3 casos (GM1, GM2, GM3), que las curvas obtenidas comienzan a divergir cuando la onda elástica llega al radio medio ($t = 0.00175$ s). Esta divergencia se evidencia notablemente en las componentes x e y dado que el fracturamiento se produce en el plano x-y. Es importante también tener en cuenta que los casos GM1, GM2 y GM3 producen resultados diferentes entre sí y que de su post-proceso se podría identificar la posición de la fractura en el dominio de cálculo respecto a la ubicación del geófono.

También es de considerable importancia que en el caso modelado, las señales de velocidad den una evidencia más clara de la ocurrencia de fracturamiento que las señales de aceleración. Vale la pena mencionar aquí que los pequeños ruidos en las señales de velocidad generan grandes variaciones en las señales de aceleración.

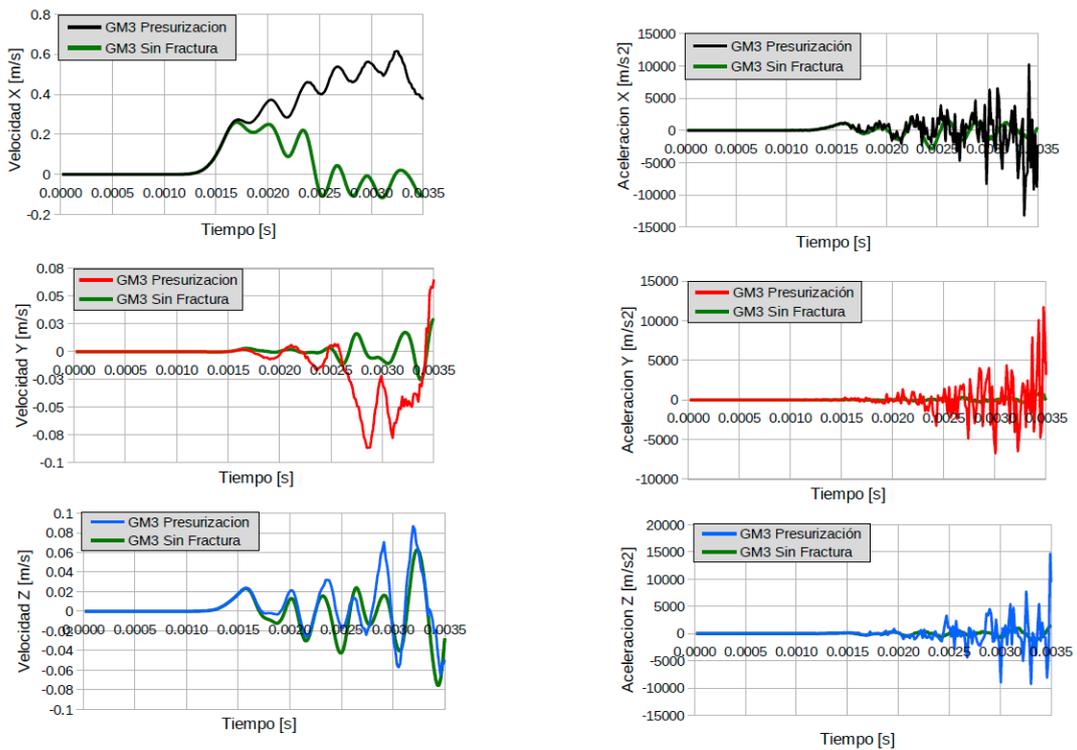


Figura 16. Velocidades y aceleraciones en GM3.

En la Figura 17 se grafican velocidad y aceleración según el eje y (ver Fig. 11) para el punto GO1. Dado que los gráficos se hicieron hasta $t = 0.00375$ s, instante en que la onda elástica llega al borde, resulta claro que no aparecerán evidencias de fractura en los puntos GOX. Esta figura indica claramente el límite geométrico del modelo.

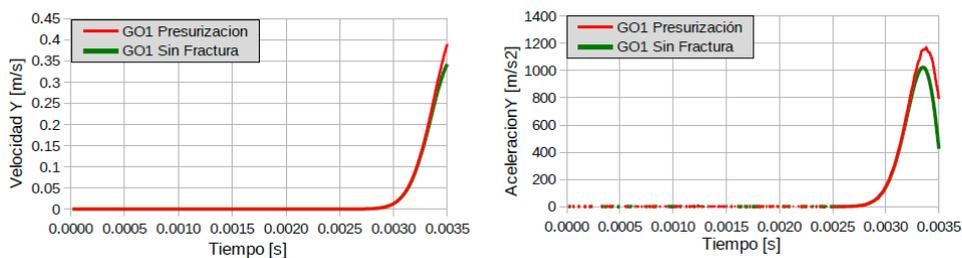


Figura 17. Velocidad y aceleración según la dirección-y en GO1.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan los primeros resultados sobre la utilización de la metodología *DG* para el modelado computacional de procesos de fractura hidráulica.

Los resultados obtenidos para el ensayo brasileño muestran una buena correspondencia entre las cargas de rotura obtenidas vía la metodología *DG* y las teóricas para las condiciones dadas. Se encontró que al simular un problema donde la inicialización de fractura es más importante que la propagación, la velocidad de aplicación de carga en la simulación deja de ser un factor importante. De la misma manera, el número de elementos para estas simulaciones no es crítico, dando tanto para una malla gruesa como para una malla fina resultados similares a los teóricos y válidos tecnológicamente.

Se ha modelado de una manera simplificada el fracturamiento de una probeta cilíndrica, motorizando hidráulicamente a partir de los elementos de interface. Los resultados obtenidos para 4 y 8 puntos de inyección muestran patrones de fisuración que convergen al aumentar el número de elementos. Se requiere un análisis más detallado para estudiar la influencia de la variación de puntos de inyección sobre la fisuración generada.

Finalmente, los resultados numéricos obtenidos de velocidades muestran claramente el inicio de la fractura hidráulica, identificándose cambios visibles entre la propagación de la onda en el medio sin fracturamiento permitido y con dicho fracturamiento. En cambio, el análisis numérico de las aceleraciones no otorga resultados concluyentes debido a amplificaciones de ruido en la señal. Esto plantea un interrogante acerca de la posibilidad de utilizar esta herramienta numérica y comparar los resultados con implementaciones de transductores de aceleración utilizados en el campo durante la estimulación hidráulica.

Futuros trabajos en este ámbito permitirán contar con simulaciones eficientes del proceso de estimulación hidráulica a escala de pozo. Estos modelos permitirán predecir a priori los resultados esperables en el campo con el fin de optimizar las costosas operaciones de fractura hidráulica.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha contado con el apoyo de geólogos, geofísicos e ingenieros de YPF SA que han aportado valiosos conocimientos a los autores.

Los autores agradecen a YPF SA el financiamiento brindado para llevar adelante este trabajo.

REFERENCIAS CITADAS

- Barenblatt, G., 1962, The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* Volumn 7 p. 55–129.
- Broek, D., 1984, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. s.l.:Martinus Nijhoff Publishers.
- Camacho, G. y M. Ortiz, 1996, Computational modelling of impact damage in brittle materials. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 33(20), p. 2899-2938.
- Chen, Z., 2013, An ABAQUS implementation of the XFEM for hydraulic fracture problems. En: *Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing*. s.l.:INTECH, p. 725-739.
- Colmenares, L. y M. Zoback, 2002, A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by poliaxial test data for five different rocks. *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 39, p. 695-729.
- Dahi-Taleghani, A. y J. E. Olson, 2011, Numerical modeling of multistranded-hydraulic-fracture propagation: accounting for the interaction between induced and natural fractures. *SPE Journal*, Vol. 16, p. 575-581.
- Dugdale, D., 1960, Yielding of steel sheets containing clits. *J. Mech. Phys. Solids*. Vol 8 p. 100–104.
- Duncan, P. y L. Eisner, 2013, Microseismic monitoring - Methods and interpretation. En: *ASEG Extended Abstracts 2013: 23rd Geophysical Conference*. s.l.:SEG, p. 139-146.

- Gordeliy, E. y A. Peirce, 2013, Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 253, p. 305-322.
- Ingraffea, A. y F. Heuze, 1980, Finite element models for rock fracture mechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 4(1), p. 25-43.
- Li, L. C., C. A. Tang, G. Li, S. Y. Wang, Z. Z. Liang y Y. B. Zhang, 2012, Numerical simulation of 3D hydraulic fracturing based on an improved flow-stress-damage model and a parallel FEM technique. *Rock Mech Rock Eng*, Vol. 45, p. 801-818.
- Maxwell, S., J. Rutledge, R. Jones y M. Fehler, 2010, Petroleum reservoir characterization using downhole microseismic monitoring. *Geophysics*, Vol. 75(5), p. 129-137.
- Noels, L. y R. Radovitzky, 2006, A general discontinuous Galerkin method for finite hyperelasticity. Formulation and numerical applications. *Int. J. Numerical methods Engrg.*, Vol. 68, p. 64-97.
- Noels, L. y R. Radovitzky, 2007, Alternative approaches for the derivation of discontinuous Galerkin methods for nonlinear mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 74, p. 1031-1036.
- Noels, L. y R. Radovitzky, 2008, An explicit discontinuous Galerkin method for nonlinear solid mechanics: Formulation, parallel implementation and stability properties. *Int. J. Numerical Methods Engrg.*, Vol. 74, p. 1393-1420.
- Ortiz, M. y A. Pandolfi, 1999, Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44(9), p. 1267-1282.
- Procopio, A., A. Zavaliangos y J. Cunningham, 2003, Analysis of the diametrical compression test and the applicability to plastically deforming materials. *J. of Materials Science*, Vol. 38, p. 3629-3639.
- Radovitzky, R., A. Seagraves, M. Tupek y L. Noels, 2011, A scalable 3D fracture and fragmentation algorithm based on a hybrid, discontinuous Galekin, cohesive element method. *Computer Methods Appl. Mechs and Eng.*, Vol. 200, p. 326-344.
- Valkó, P. y M. J. Economides, 1995, *Hydraulic Fracture Mechanics*. s.l.:John Wiley & Sons Ltd..
- Weber, N., P. Siebert, K. Willbrand, M. Feinendegen, C. Clauser y T. P. Fries, 2013, The XFEM with explicit-implicit crack description for hydraulic fracture problems. En: *Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing*. s.l.:INTECH, p. 711-724.
- Will, J., 2010, *Optimizing of hydraulic fracturing procedure using numerical simulation*, s.l.: Dynardo Lectures.
- Zhou, L. y M. Hou, 2013, A new numerical 3D-model for simulation of hydraulic fracturing in consideration of hydro-mechanical coupling effects. *Int. J. of Rock mechanics and Mining Sciences*, Vol. 60, p. 370-380.